第 11 講　場合の数(2)

【基礎確認事項】

［１］　順列

□ n 個の異なるものから，異なる r 個 $(r \leqq n)$ を取って 1 列に並べることを，**n 個のものから r 個取る順列**といい，${}_n\mathrm{P}_r$ で表す．取るだけでなく，これを並べることが順列であり，これに対し，取るだけの総数を組合せという．組合せについては後述する．

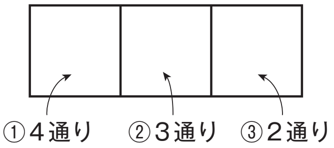
例　4 個の数字 1，2，3，4 から異なる 3 個を取る順列 ${}_4\mathrm{P}_3$ について

①１番目の数字は 1～4 の 4 通り

②２番目の数字は①で取った数字を除く 3 通り

③３番目の数字は①②で取った数字を除く 2 通り

よって　${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$　である．



異なる n 個から異なる r 個取る順列

$${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個}}$$

※${}_n\mathrm{P}_r$ の P は Permutation（順列）の頭文字をとったものである．

□ n 個の異なるものをすべて並べるときの順列の総数は，${}_n\mathrm{P}_n$ で表される．これは ${}_n\mathrm{P}_r$ の式で $r=n$ のときであり，${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$　である．この 1 から n までのすべての自然数の積を **n の階乗**といい，**$n!$** と表す．

異なる n 個すべての順列（総順列）

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$$

□ここで以下のことが成り立つ．

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{P}_r&=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\\&=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\times\frac{(n-r)!}{(n-r)!}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

この式が $r=n$，$r=0$ でも成り立つように，$\mathbf{0!=1}$，${}_n\mathbf{P}_0\mathbf{=1}$　と定める．

⇒　C&U ①

［２］　重複順列

□ n 個の異なるものから r 個を取る順列において，r 個に同じものがあることを許す順列を考える．1 番目の選び方は n 通りである．2 番目の選び方は，1 番目で選んだものとの重複を許すので n 通りである．3 番目以降についても同様に n 通りである．よって，以下のことが成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

異なる n 個から重複を許して r 個取る順列　(重複順列)

$$\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots\cdots n}_{r\text{個}}=n^r$$

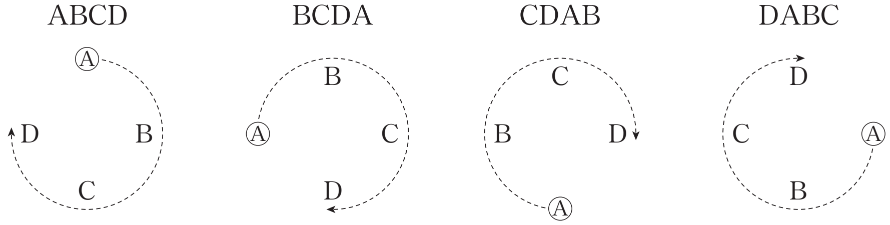
□重複順列においては $r\leqq n$ という制約は必要ない．また，同じものを選ぶことが許されるので，重複順列における「異なる n 個のもの」は「n 種類のもの」と考えることができる．

⇒　C&U 2

[3]　円順列とじゅず順列

□順列において，1列ではなく円形に並べる順列を**円順列**という．円順列では，適当に回転して並びが一致するものを同じものとみなす．

例　A，B，C，Dの順列において，ABCDとBCDAは1列のときは異なるものであるが，円順列では同じものである．

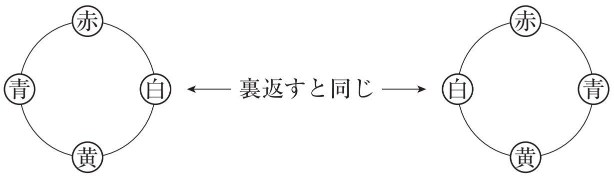


上記の4つは円順列においてはすべて同じものである．これらをAから見て右回りに並ぶ3個のものを順列として見るとすべて「BCD」となっている．したがって，A，B，C，Dの円順列においてはAを固定して残りの3文字の順列を考えればよいことがわかり，その場合の数は　3!＝6（通り）である．

□一般に，すべて異なる n 個のものの円順列の総数は　$(n-1)!$　通りとなる．

□さらに表裏を裏返すことができる円順列（**じゅず順列**）を考える．

例　ここでは赤，白，黄，青の4色の球を円形にひもでつないで作る首飾りの総数を考えよう．上の円順列の考え方によるとその総数は　3!＝6（通り）である．ところが，その中に「裏返すと同じもの」が存在する．



この場合においては裏返すと同じになるものが2組ずつ存在する．よって，首飾りの総数は　3!÷2＝3（通り）である．

□一般に，すべて異なる n 個のもののじゅず順列の総数は　$(n-1)!\div 2$　通りとなる．

⇒　C&U 3

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［4］ 同じものがあるときの総順列

□ここまではすべて異なるものの順列を考えてきたが，ここでは同じものがある場合の順列を考えよう．

例　a，a，a，b，c の5個のものの総順列を考える．3個の a を a_1，a_2，a_3 として「すべて区別する」と，この「すべて異なる」5個のものの順列は　$5!=120$（通り）ある．

a_1	b	a_2	c	a_3
a_1	b	a_3	c	a_2
a_2	b	a_1	c	a_3
a_2	b	a_3	c	a_1
a_3	b	a_1	c	a_2
a_3	b	a_2	c	a_1

120通りのうち,左のように3個の a の場所が同じものは「区別をなくす」とすべて同じとなる．左の例でわかるように，同じ順列となるものは a の個数の順列　$3!=6$（通り）ずつ存在する．よって5個のうち同じものを3個含む順列の総数は　$5!\div3!=20$（通り）である．

一般に，以下のことがいえる．

同じものを含む総順列

n 個のもののうち，同じものを p 個，q 個，r 個，…… ずつ含むときの順列は　$\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$　通りである．

⇒　C&U 4

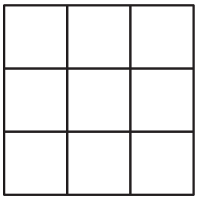
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 (1)　a, b, c, d, e の5つの文字を1列に並べる方法は何通りあるか．また，この5つの文字から3文字を取って1列に並べる方法は何通りあるか．

(2)　右の図において，9個のマス目の中に1〜9の数字を1つずつ書き入れる方法は何通りあるか．



2　1, 2, 3, 4, 5の5個の数字を使って4桁の数をつくる．次のものはいくつできるか．ただし，同じ数字を重複して用いてもよいとする．

(1)　4桁の数の総数　　　(2)　3個以下の数字を用いた整数

3　a, b, c, d, e, f の6色の玉がある．これを円形に並べるとき，a と b が隣り合わせになる場合，向かい合わせになる場合はそれぞれ何通りあるか．また，1本の糸を通して輪を作るとき，並べ方は何通りあるか．

4　YOKOHAMAの8文字を1列に並べる並べ方は何通りあるか．またそのうち，Y，K，H，Mがこの順に並ぶものは何通りあるか．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　場合の数(2)

1 [1]　父母と子供3人が1列に並ぶとき，次の問いに答えよ．

(1)　父母が両端にくる場合は何通りあるか．

(2)　父母の間に子供が2人以上入る場合は何通りか．

[2]　6個の数字0，1，2，3，4，5から異なる3個を用いて3桁の整数をつくる．このとき，次のものは何個できるか．

(1)　3の倍数　　(2)　324より小さい整数

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］　6 個の異なる玉を次のように分けて入れる方法は何通りあるか．ただし，空箱がないようにするものとする．

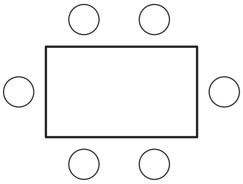
⑴　A，B 2 つの箱に分ける　　⑵　2 つに分ける

⑶　A，B，C 3 つの箱に分ける

［2］　6 人の家族を次のように座らせる方法は何通りあるか．

⑴　6 人から 4 人選んで円形のテーブルに座らせる

⑵　6 人を右の図のようなテーブルに座らせる



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　黒玉1個，赤玉2個，白玉4個がある．次の問いに答えよ．

(1)　机の上に円形に置いて並べるとき，並べ方は何通りあるか.

(2)　糸を通して首飾りを作るとき，何通りの首飾りができるか.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　場合の数(2)

(1)　7個の数字1，2，3，4，5，6，7から相異なる5個の数字を取ってつくる5桁の数のうち，25で割り切れるものは **アイウ** 個ある．

(2)　0，1，1，1，2，2，3の7個の数字からつくることができる7桁の整数は **エオカ** 個ある．

(3)　男子5人，女子5人が丸テーブルに着席するとき，男女が交互になる着席の仕方は **キクケコ** 通りある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　場合の数(2)

【CHECK & UP】

1 (1)　5 つの異なる文字を 1 列に並べる方法は

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$ **120（通り）**

このうち異なる 3 文字を取って 1 列に並べる方法は

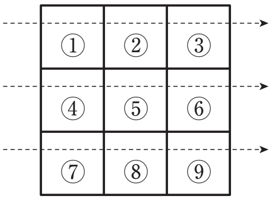
$_5P_3=5\cdot4\cdot3=$ **60（通り）**

ここでは「階乗」と「$_nP_r$」の計算方法について確認した．5 文字を並べる際に，最初から 1 文字ずつ決めるつもりで 5 通り，4 通り，…，1 通りと書いても結果は 5・4・3・2・1 であるが，特に「制約」がない限り次は 1 つ減ることは明確であるから，1 つ 1 つ考えるのは無駄である．つまり制約がなければ，解く途中過程においてはとりあえず「5! 通り」としておいてよい．そしてすべての条件を扱ったときに改めて計算すればよいのである．$_5P_3$ についても同様．これに限らず常に「制約」を意識しながら解く必要がある．

(2)　右図①～⑨に 1～9 の数字を 1 つずつ書き入れる方法で，

$9!=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$=$ **362880（通り）**



「1 列に」というのは，「直線」という意味を必ずしも含んではいない．ある規則に基づいていて，同じ場所に戻ってこなければ，その形状が例え「曲線」であろうが，場所が離れようが関係なく順列が使える．つまり，あるものとあるものを「対応づける」のが順列である．この場合は「場所」と「数字」を 1：1 で対応づけている．「役員名」と「人」の対応など順列の応用は幅広い．

2 (1)　千，百，十，一の位がそれぞれ 1～5 の 5 通り．

したがって　4 桁の数の総数は

$5\cdot5\cdot5\cdot5=5^4=$ **625（個）**

(1)　同じものを使ってもよい，いわゆる「重複順列」の問題である．他に制約がなければ常に個数が「リセット」されるため，同じ数字の掛け算，すなわち累乗となる．

(2)　4 桁の数字をつくるのに使える数字は多くて 4 種類である．

よって 3 個以下の数字を用いた整数は，(1)の総数から 4 個の数字，つまりすべて異なる数字の場合を除いたものである．

すべて異なる場合は，異なる 4 個の数字を選んで並べる順列の総数で，

$_5P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$（個）である．

したがって求める場合の数は　$625-120=$ **505（個）**

(2)は題意を満たさない場合を除く練習である．3 個以下「でない」，すなわち「4 個以上」の場合を除けばよい．ただし，多くても 4 つしか使えないので，4 つの数字を使う場合を除けばよい．それはすべて異なるものを選んで並べる順列である．

3 a と b を 1 組とすると，その左右の決め方が　2! 通り

その 1 組を固定し，他の 4 文字を円形に並べる方法が　4! 通り

よって a と b が隣り合わせになる場合の総数は　$2!\times4!=$ **48（通り）**

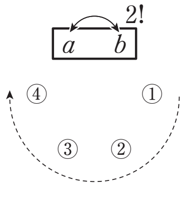
また，a と b が向かい合わせになる場合，a を固定すると

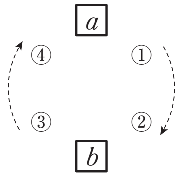
b の場所はその向かい側に固定される．

残りの 4 文字を並べる方法が　4! 通り

よって a と b が向かい合わせになる場合の総数は　$4!=$ **24（通り）**

1 本の糸を通して輪を作るとき，裏返すと円順列として同じものが 1 組ずつ存在する．





ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6 個のものの円順列の総数は　5! 通り．

したがって輪の総数は　$\frac{5!}{2}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2}$

$=$**60（通り）**

> a，b の場所を「固定」すれば回して同じになるものが出てくるはずがない．①〜④に c，d，e，f を対応させるのは通常の「順列」である．
> 　向かい側も a と b の場所を固定するものであるが，a の場所を決めるだけで b も決まってしまい，計算には現れないのが特徴．

4　YOKOHAMA には O，A が 2 個ずつ，Y，K，H，M が 1 個ずつ含まれている．

これらの文字をすべて並べる総数は　$\frac{8!}{2!2!}=$**10080（通り）**

Y，K，H，M をすべて○と置き換えてからすべて並べ，○を順に Y，K，H，M とすれば題意を満たす．

O，A が 2 個ずつ，○が 4 個の順列の総数は

$\frac{8!}{4!2!2!}=$**420（通り）**

これが求める総数である．

> 同じものを含む順列をここでは階乗を使って計算する．つまり，一度すべてを区別し，そして同じものの「重複度合いで割る」ことにより，同じものをなくす，という流れである．
> 　この考え方は，「並び順が決まっている」ものについても応用することができる．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　場合の数(2)

1［1］　父母と子供 3 人が 1 列に並ぶとき，次の問いに答えよ．
　(1)　父母が両端にくる場合は何通りあるか．
　(2)　父母の間に子供が 2 人以上入る場合は何通りか．

父母と子供 3 人の合計 5 人の並べ方の総数は　$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$（通り）

(1)　父母が両端にくるとき，その並び方は　$2!$ 通り
　子供 3 人の並び方が　$3!$ 通り
　したがって求める並び方の総数は　$2!\times3!=2\times6=$ **12（通り）**

(2)　父母の間に子供が 2 人のみ入るとき
　父母の間に入る子供の 2 人の並び方が　${}_3P_2$ 通り
　父母の並び方は　$2!$ 通り
　父母と間に入る子供 2 人を 1 組として考えると，並び方は　$2!$ 通り
　よってこの場合の並び方の総数は　${}_3P_2\times2!\times2!=3\cdot2\times2\times2=24$（通り）
　父母の間に子供が 3 人入るとき，(1)より 12 通り
　したがって，求める並び方の総数は　$24+12=$ **36（通り）**

【別解】　父母と子供 3 人の合計 5 人の並べ方の総数は 120 通り．
　父母の間に子供が 2 人以上入らないのは以下のとき．
　　(i)　父母が隣り合う場合　　(ii)　父母の間に子供が 1 人のみ入る場合
　(i)のとき，父母を 1 組として考えると，並び方は　$4!$ 通り
　　父母の並び方は　$2!$ 通り　　よって並び方の総数は　$4!\times2!=48$（通り）
　(ii)のとき，父母の間に入る子供 1 人の選び方が 3 通り
　　父母とその子供の 3 人を 1 組として考えると，並び方は　$3!$ 通り
　　父母の並び方は　$2!$ 通り　　よって並び方の総数は　$3\times3!\times2!=36$（通り）
　よって求める並び方の総数は　$120-(48+36)=$ **36（通り）**

1［2］　6 個の数字 0，1，2，3，4，5 から異なる 3 個を用いて 3 桁の整数をつくる．このとき，次のものは何個できるか．
　(1)　3 の倍数　　　(2)　324 より小さい整数

(1)　3 の倍数となるのは，各位の数字の和が 3 の倍数となるときである．
　その 3 つの数字の組合せは (0，1，2)，(0，1，5)，(0，2，4)，(0，4，5)，(1，2，3)，(1，3，5)，(2，3，4)，(3，4，5)　の 8 通りである．このうち
　0 を含むものについては，百の位は 0 以外の数字であることよりその並べ方の総数はそれぞれ　$2\times2!=4$（通り）
　0 を含まないものについては，その並べ方の総数はそれぞれ　$3!=6$（通り）
　したがって求める総数は　$4\times4+6\times4=$ **40（個）**

(2)　百の位が 1 または 2 のものは，$2\times{}_5P_2=40$（個）

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

「百の位が3」かつ「10の位が0または1」のものは　$2\times4=8$（個）

百の位が3，十の位が2のものは320，321の2（個）

よって，324より小さい整数は　$40+8+2=$**50（個）**

2 ［1］　6個の異なる玉を次のように分けて入れる方法は何通りあるか．ただし，空箱がないようにするものとする．

(1)　A，B 2つの箱に分ける　　(2)　2つに分ける

(3)　A，B，C 3つの箱に分ける

(1)　6個の玉をそれぞれA，Bのいずれに入れるかを決める方法が

$2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6=64$（通り）

このうち空箱ができるのは，玉をすべてA，すべてBに入れる2通り

したがって求める総数は　$64-2=$**62（通り）**

(2)　(1)においてA，Bの区別をなくして　$62\div2=$**31（通り）**

(3)　6個の玉をそれぞれA，B，Cに入れる方法が　$3^6=729$（通り）

このうち，空箱ができる場合を除く．

空箱が2箱のとき，玉をすべてA，B，Cのいずれか1つに入れる3通り

空箱が1箱のとき，その空箱の決め方が3通り

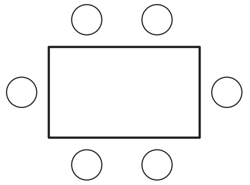
残り2箱に空箱ができないように入れる方法が(1)より62通り

したがって求める総数は　$729-3-62\times3=$**540（通り）**

2 ［2］　6人の家族を次のように座らせる方法は何通りあるか．

(1)　6人から4人選んで円形のテーブルに座らせる

(2)　6人を右の図のようなテーブルに座らせる



(1)　6人から4人選んで並べる順列は　${}_6P_4=360$（通り）

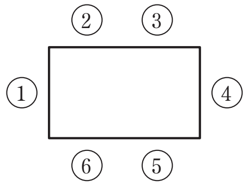
このうち，円順列にすると同じになるものが4通りずつある．

したがって，求める総数は　$360\div4=$**90（通り）**

(2)　ある特定の人を右図①に固定すると，残りの人の並べ方は5!通りである．それはその人が②～⑥に座る場合も同様である．

ところが，①と④，②と⑤，③と⑥に座る場合の中に，180°回転させると同じ順列となるものが他に必ず1つずつある．

よって求める総数は　$5!\times6\div2=6!\div2=$**360（通り）**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

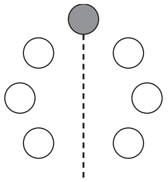
3 黒玉1個，赤玉2個，白玉4個がある．次の問いに答えよ．

(1) 机の上に円形に置いて並べるとき，並べ方は何通りあるか.

(2) 糸を通して首飾りを作るとき，何通りの首飾りができるか.

(1) 黒玉の位置を固定した残り6個の並べ方が求める総数である.

よって　$\dfrac{6!}{2!4!}={}_6C_2=$**15（通り）**



(2) (1)の15通りのうち，線対称のものを考える.

黒玉を通る円の中心線によって区切られた左右3個がそれぞれ赤玉1個，白玉2個であり，さらに線対称であるものは右側3個の並べ方の　$\dfrac{3!}{2!}={}_3C_1=3$（通り）だけある.

この3通りを除く残り12通りの中には，裏返すともとと一致するものがそれぞれ必ず1つずつある．したがって求める総数は　$12\div2+3=$**9（通り）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　場合の数(2)

(1)　7 個の数字 1，2，3，4，5，6，7 から相異なる 5 個の数字を取ってつくる 5 桁の数のうち，25 で割り切れるものは **アイウ** 個ある．

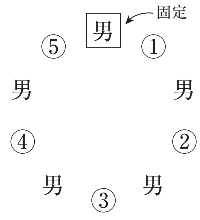
(2)　0，1，1，1，2，2，3 の 7 個の数字からつくることができる 7 桁の整数は **エオカ** 個ある．

(3)　男子 5 人，女子 5 人が丸テーブルに着席するとき，男女が交互になる着席の仕方は **キクケコ** 通りある．

(1)　1，2，3，4，5，6，7 の数字でつくる 5 桁の数のうち 25 で割りきれる数は，下 2 桁が 25 または 75 のとき．いずれの場合も，残りの 3 桁の決め方が　${}_5P_3$ 通り．
よって，求める総数は　$2\times{}_5P_3=2\times5\cdot4\cdot3=$**120**（個）

(2)　先頭の位が 1 のとき
残り 6 桁は 0，1，1，2，2，3 の順列で　$\dfrac{6!}{2!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot2}=180$（通り）
先頭の位が 2 のとき，残り 6 桁は 0，1，1，1，2，3 の順列で
$\dfrac{6!}{3!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120$（通り）
先頭の位が 3 のとき
残り 6 桁は 0，1，1，1，2，2 の順列で　$\dfrac{6!}{3!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot2}=60$（通り）
したがって，求める総数は　$180+120+60=$**360**（個）

【別解】　7 つの数字の総順列は　$\dfrac{7!}{3!2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot2}=420$（通り）
このうち，先頭が 0 になるものは残りの 6 つの数字の総順列で
$\dfrac{6!}{3!2!}=60$（通り）
よって，求める総数は　$420-60=$**360**（個）



(3)　男子 5 人を円形に並べる方法が　4! 通り
女子は右図①～⑤に 1 人ずつ座る方法で　5! 通り
したがって，求める総数は
$4!\times5!=24\times120=$**2880**（通り）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。